CVA (Credit Value Adjustment)

カウンターパーティ・リスクを考慮したデリバティブの評価法

野村證券 金融工学研究センター

大本 隆

2010/7/22　(改訂　2010/10/11)

1　CVAとは何か

2000年代後半のサブプライム問題に端を発する世界的な規模でのクレジット・クランチ——信用収縮及び流動性枯渇による金融危機以来，デリバティブ取引に於いて本来あるべきクレジットリスクの織り込み方について様々な議論が為されてきた. [1] 担保管理やクレジット・チャージについても同様である．昨今注目を集めているCVA(Credit（又は，Counterparty-risk）Value Adjustment) は，risk-freeな，即ち，default-freeな評価からの調整項として，どの様に時価調整するべきか，を問うものである. [2]

広義には，信用リスク（credit risk）を計測し，然るべきチャージとリザーブ（プロヴィジョン）を課し，ポートフォリオ・ベースでのリスク管理をするかを提示する手法ともいえる. [3]

CVAは，比較的実務寄りのマーケット・リスクとクレジット・リスクに絡んだ問題として近年着目されており，先行研究として，Brigo他（[4]，[6]，[7]）等が，また，最近ではCVAの解説書も幾つか出版されている（[9]，[10]，[12]）.

CVAを取り扱う，あるいは検討している動機や背景としては，以下の項目が挙げられる.

- Lehman Bros.の例の様に大手投資銀行でも破綻し，Lehmanと相対のデリバティブ契約を結んでいた金融機関や投資家が，現実にカウンターパーティ・リスクに晒されたこと（例：モノライン，AIG etc）. [4]
- スワップをはじめ，前世紀末から店頭（OTC）デリバティブ市場が世界的に膨大な規模に成長し続けていること（想定元本ベースとしても，エクスポージャーとしても膨大な金額）

[1]デリバティブの黎明期には，流動性や信用度のスプレッドを考慮した価格付けがあった．担保の有無やファンディングの要因も考慮されていたが，デリバティブ市場の急拡大，グローバリゼーション，低金利政策とクレジットのタイトニングにより，この種の問題は蔑ろにされ，それ以外のリスク特性の分析やエキゾティック物の商品組成に流されていった．一方，事業会社にもデリバティブ取引が拡大するにつれ，必ずしも上位の格付ではない取引主体も一般的になり，潜在的にこの種の問題が膨らんでいった．この種の問題は2006〜07年以降に顕在化する.

[2]無裁定な完備市場でのデリバティブ価格付けはリスク中立化法を正当化する．本論では，デフォルタブル・デリバティブであっても，リスク中立測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ の下でのデフォルト・フリーなディスカウント（確率的金利のケースを含む）による価格付けを考える．参照組織と相手方という二つの（更に，当行を加えれば三つの）クレジットの要素をもつデリバティブの，測度 $\mathcal{Q}$ の下での価格付けは，かなり以前から研究されてきた.

[3]与信管理やクレジット・エクスポージャー計算では，実測度 $\mathcal{P}$ の下でのヒストリカル分析が太宗を占めるが，CVA計算にはマーケットから入手しキャリブレートしたパラメータを用いた，測度 $\mathcal{Q}$ の下での評価になる.

[4]判りやすさの為に，用語を若干濫用している．そもそもカウンターパーティ・リスクとは，相手がデフォルトする以前の時点での計測であり，破綻後の処理の問題ではない.

- 信用リスクを外すヘッジ・ツールとして，CDS（Credit Default Swap）を主としてクレジットデリバティブの理解が進んだこと[5]
- カウンターパーティ・リスク管理（与信枠，リザーブ，エクスポージャー計測）が原則，ネットアウトされたポートフォリオ・ベースで為されること[6]
- CVA（及びファンディングやコラテラル（担保））の考慮が、評価損益やリスクに直接／間接に重大な影響を及ぼすこと[7]

結論として，リスク管理（に近い）部署あるいは金融市場のトレーディング部門で，ポートフォリオ・ベースでのカウンターパーティ・リスク管理とクレジット・トレーディングを組み合わせが求められる．つまり，デリバティブ・トレーディング・デスク（ユニット）の個々のトレーダー毎にではなく，いわば，全社的ないし金融市場トレーディング部門全体で，オーバーレイ（overlay）として機能するトレーディング・デスクが設置される傾向にある．その意味では，リスク管理部門から派生して出来たトレーディング・デスクとも言える．

日本ではまだ，CVA の必要性や有効性を感じている金融機関の数は僅少と言える．[8] 市場取引（取引所取引）での証拠金（マージン・コール）や有担保貸付での CSA 等により注力したい，とする銀行や証券会社が太宗を占める．[9] 一方，ウォール街やシティの金融機関では，CVA の重要性は明らかであり，双方向 CVA も喫緊の課題の一つとして受けとめられている様である．

1.1 カウンターパーティ・リスク（Counterparty risk）

CVA では，店頭デリバティブ取引やレポ取引に於ける，取引相手（カンターパーティ）の信用リスク（即ち，信用事由は取引相手のデフォルト），及び，デリバティブ取引が晒されている市場リスク，及び両者の相関（correlation）が問題になる．言うまでもなく，金融市場におけるリスクとは（即ち，金融商品や金融取引のリスクとは），将来不確実な損失額を指し，その構成要素として，

1. 市場リスク（market risk）—— 金融指標（原資産や参照指標を指す）の相場変動に関わるリスク
2. 信用リスク（credit risk）—— 参照組織や取引相手としての企業や債務者の債務不履行（デフォルト）リスク
3. オペレーショナル・リスク（operational risk）—— 業務上の，意図的ではなく生じるエラーやミスによる損失額
4. 流動性リスク及びシステミックリスク—— 金融システムの崩壊，市場流動性の枯渇によるリスク

[5]店頭デリバティブでは，評価モデルのみならず，システムやデータの要素も大きい．マーケット・データ（金利や為替，CDS 等）や取引属性データ，クレジット・ライン（信用枠），内部格付，デフォルト確率，回収率，法人情報，担保契約等，多様で膨大なデータ・ベースを要し，この点での負担も大きい．

[6]CDS 等の取引のネッティング（netting）が可能か否かは，（当事者間の契約の）ISDA 仕様のマスターアグリーメント（基本契約書）に基づく，取引属性の条件で決まる．極端なケースとして，同じ相手と同一条件の CDS を両建てにしている場合のエクスポージャーは，ネッティングできれば $V - V = 0$，できなければ，$V^+ + V^- = |V_t|$ が掛かる．

[7]双方向 CVA に含まれる DVA（Debt Value Adjustment）の寄与が大きいケース，例えば，自行（当社）のクレジットが悪化すると評価益が立つ，ということもある．

[8]日本の金融機関には，（スワップの）マーケット・シェアを確保する，スワップ取引が単体の取引ではない，クレジット・チャージに馴染みがない，システムの開発・導入コスト，与信管理の精度等，様々な事情がある，ということで，CVA に対する懐疑もかなりある．

[9]とは言え，担保があるので CVA 不要，という結論にはならない．担保管理，CSA や追証などでカウンターパーティの全てをカバーできるのではなく，閾値（Threshold）が一種のバリアになっている．

などがある．本論では，店頭デリバティブ（OTC derivatives）—— 相対でのデリバティブに係わる 1) 市場リスクと 2) 信用リスクに話を絞る．

実際，店頭デリバティブの市場規模や取引相手の信用リスクに晒されている金額の大きさは甚だ把握し難い．想定元本の積算では，経済的な意味での取引規模を直接表すものでないからである．[10] CDS 等のクレデリ（クレジット・デリバティブ）では，同等な両建てのポジションがあったりするので（インデックス物では特に），一括してネッティング（netting）すると相殺され，想定元本が圧縮される．こうした取引の圧縮をする専門業者も存在する．

カウンターパーティ・リスク（counterparty risk）の対象となる取引とは，上場先物のような取引所取引（市場取引）ではなく，[11] 店頭取引（OTC）である。それらは契約の当事者である二者間の相対取引だからである．[12] 将来のある時点で時価評価ベースで当方が勝っている（評価益がある）とき，取引相手がデフォルトすると，同じ契約を別のカウンターパーティと結ぶには再構築コスト（replacement cost）が掛かる．この（将来の）再構築コストをエクスポージャー（exposure）—— どの程度の額をリスクに晒しているかの大きさ（損害金）—— と呼ぶ．

1.1.1 クレジット・エクスポージャー

同じクレジット水準の（平たく言えば，同格付けの）二者間で金利スワップ契約する場合，時点 $t=0$（期初）ではスワップ時価はほぼゼロ（$V_0 \simeq 0$）である．しかし以後は，金利変動などマーケットの変化のため時価は振れる．このスワップに係わる金融指標（原資産ないし参照指標）が拡散過程で記述されるならば，時間 t の発展と供に V_t の分布は広がっていく（拡散する）．このとき，当行から見て相手行がデフォルトした際に生じる再構築コストは，当行が時価評価で勝っている，即ち，未実現の評価益が立っている場合（$V_t > 0$）であり，評価損（$V_t \leq 0$）では発生しない．

つまり，（当行から見た）counterparty risk のエクスポージャーとは，満期をデフォルト時刻 τ とし，当該スワップを原資産とし，行使価格を 0 円としたヨーロピアン・コール・オプション（スワップション）のペイオフである．したがって，エクスポージャーを表す額は各々，[13]

$$
\begin{aligned}
&(\text{当行から見た立場}) \qquad V_t^+ \equiv \max\{V_t, 0\} \\
&(\text{相手行から見た立場}) \qquad V_t^- \equiv -\min\{V_t, 0\} = (-V_t)^+
\end{aligned}
$$

となり，対称な関係にある（$V_t = V_t^+ - V_t^-$ に注意）．[14] V_t は負値にもなりえ，一種の釣鐘型（bell-shaped）の分布になる．実務では従来，計算コストを低減し，精密で収束安定性のある数値計算を指向するので，正規分布で近似したり，Brown 運動で記述したりして，エクスポージャーを計算する訳である（例えば，期待エクスポージャー $E\left[V_t^+\right]$ を計算する）．

---

[10] バーゼル（BIS）の公表統計によれば，世界中の企業の時価総額を遙かに超えている（取引件数を半分として集計）．マス・メディアには，デリバティブを虚構の産物と言う論者もいるが，話の順序が逆である．この統計は単に，時間的な推移として，如何に店頭デリバティブ市場が成長したかの傾向を示唆したものに過ぎない．

[11] 取引所（Exchange）決済の為の取引所専属の清算機関（デフォルトしないと想定される），相場変動に応じて証拠金（margin）を徴収するので，取引所取引（市場取引）には取引相手のリスク（counterparty risk）はない．

[12] 株式や商品（コモディティ）でメジャーなのは取引所取引であるが，債券取引の大半やスワップ取引の全ては店頭取引．

[13] 現金担保 $k\,(>0)$ がある場合，エクスポージャーはその超過分 $(V_t - k)^+$，即ち，行使価格は 0 でなく，k のコール・オプションのペイオフとなる．

[14] 任意の実数 x の positive part を $x^+ \equiv \max\{x, 0\}$, negative part を $x^- \equiv -\min\{x, 0\}$ と定義する（些か紛らわしいが，[10] 他では，x^- を符号を反転して定義している）．したがって，$x = x^+ - x^-$，$|x| = x^+ + x^-$ が常に成り立つ．いわゆる，オプションの put-call parity とは，この関係を指している．

大別すると，a) 平均的な期待エクスポージャー（average)，及び，b) 最大期待エクスポージャー（peak）といった要素が重要になる．[15] クレジット・エクスポージャーに基づき，信用枠での与信管理や担保管理あるいはクレジット・リザーブ（プロヴィジョン：準備金）や CVA トレーディングを行う訳である．

原資産や参照指標の拡散（diffusion）によって，将来時点のエクスポージャーは正値であり，将来の日付になるに従って増大する（粗く言って，エクスポージャーの大きさは $\sigma\sqrt{t}$ に比例する）．金利スワップ（IRS）の場合は満期 T での元本交換を伴わないので，満期 T に接近するにつれて残余のキャッシュフローの受払が少なくなり，再び 0 に近づく．しかし，通貨スワップ（CCS）などの満期 T で元本交換を伴う場合では，一般に 0 に近づくことはなく，満期での受払の金額の大きさに応じた，ある正値に収斂する．

最も単純な設定では，時価評価（Mark to Market）での損益が正規分布（Brown 運動）に従うモデルを考える．[16]

$$V_t = \mu + \beta t + \sigma W_t \quad \text{i.e.} \quad dV_t = \beta dt + \sigma dW_t\ ,\ V_0 = \mu \tag{1.1}$$

但し，全てのパラメータ（年率）は定数とする．このとき，エクスポージャーは ${V_t}^+ \,(= \max\{V_t, 0\})$ であるから，評価損益 V_t を原資産とした行使価格 0 のコール・オプションのペイオフの形になることが判る．１次元の正規分布関数 $\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \phi(\xi) d\xi$ とその密度 $\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ を用い，$d = \frac{\mu+\beta t}{\sigma\sqrt{t}}$ と表記すれば，期待エクスポージャー $\mathrm{EE}(t)$ は次の閉形解：

$$\begin{aligned} \mathrm{EE}(t) &\equiv E\left[\, {V_t}^+ \,\right] \\ &= \int_{-d}^{\infty} \left(\mu + \beta t + \sigma\sqrt{t}\xi\right) \phi(\xi) d\xi = (\mu + \beta t)\ \Phi(d) + \sigma\sqrt{t}\phi(d) \end{aligned} \tag{1.2}$$

で表される．上式を $[0, T]$ で積分し，T で除した平均的な期待エクスポージャー $\mathrm{EEA}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{EE}(t) dt$ もまた閉形解で表される．[17] ここで平均 0（$\mu = \beta = 0$）とすると $d = 0$ なので，更に簡単になり，

$$\mathrm{EEA}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \sigma\sqrt{T} \tag{1.3}$$

を得る．これを Expected Positive Exposure (EPE) と言う．列挙すれば以下の様に纏められる．[18]

- EE（Expected Exposure）―― エクスポージャー（正値の時価）の期待値
- PFE（Potential Future Exposure）―― （将来）ポテンシャル・エクスポージャー：一定の信頼区間での最大エクスポージャー[19]
- EPE（Expected Positive Exposure）―― 一定期間の EE の平均
- Effective Expected Exposure ―― 実効 EE（バーゼル　では，期間中の最大 EE）

[15] リスク計測では実測度 $\mathcal{P}$ での分布が重要になるが，一般に，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ での計算を利用する．勿論，必ずしも $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の二者択一の問題ではなく，ある種の同値な測度の集合を考える必要もありえる．

[16] 代替案として，二つの幾何 Brown 運動（対数正規）X_t と Y_t の差（スプレッドは対数正規ではない）を参照指標とする（$V_t = X_t - Y_t$）．$E[V_t^+]$ は交換オプションなので，片方をニューメレール（基準財）として除することで，解析的に求められる．但し，$E\left[(X_t - Y_t - K)^+\right]$ の形のスプレッド・オプションには閉形解は存在しない．しかし，この場合でも，解析近似や数値積分で高精度の近似が可能である．

[17] レンジ・アクルーアルの一種であるスウィッチ・オプション（ディジタル・オプションの時間積分）の形をしており，BS モデル（対数正規）の場合，部分積分から閉形解を得られる．

[18] バーゼルでも認められている簡易法：「カレント・エクスポージャー方式」とは，　現時点での時価評価に基づいて算出される再構築コストに、　「ポテンシャル・エクスポージャー（PE)」（＝想定元本に、残存期間に応じた一定のアドオン掛目を乗じたもの）を加算した額（　＋　）をもってエクスポージャーと定義する手法である．近年はシミュレーション・ベースや他の手法（商品別）を採用する金融機関も増えている．

[19] VaR（Value at Risk）は平均から下方にシフトした数値（$\alpha\%$ のパーセンタイル点，例えば，2 標準偏差分を下方にシフト）だが，PFE は例えば 2 標準偏差分を平均値から上方に乖離した数値.

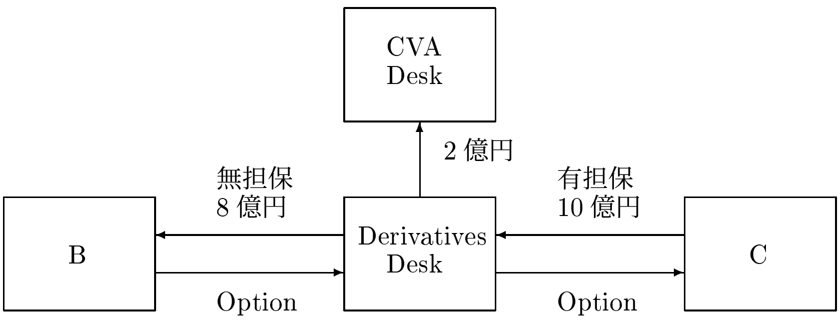
1.2 CVA の考え方

ここで一つ例題を考えてみたい．スワップでは受払があるので，OTC オプションを考える．

1.2.1 例題

格付の異なる二つの銀行 A 行あるいは B 行から，同一の条件で（リスクフリーの時価評価で）10 億円の価値のヨーロピアン・オプションを購入するケースを考えてみよう．クレジットを反映し，高格付けの A 行では 9 億円，低格付けの B 行では 8 億円がアップフロント・プレミアム（購入コスト）として提示してきたとする．[20] ここで問題であるが，単にトレーディング・デスクで，割安な提示を受けた B 行から購入すると $10-8=2$ 億円の収益としてよいのだろうか．当社としては，B 行のクレジット・エクスポージャーに晒されており，適切なクレジット・チャージをしたことにならない．対処法としては，a) クレジット・リザーブをとる，というやり方もあるが，別途，b)CVA デスクに 2 億円を支払う，という事も考えられる．

別途，担保付のカウンターパーティC 行に 10 億円で back-to-back するとすれば，トレーダーは B 行に 8 億円，CVA デスクに 2 億円を支払って，C 行から 10 億円を受け取る（担保付き）のでフラット，というスキームになる．これは実質的に，C 行から担保付借り入れでファンディングし，B 行に無担保融資をしたのと同義である．[21]



翌日，B 行の CDS スプレッドが高くなって，クレジット・リスクが増えると，手元の 2 億円だけで当該エクスポージャーをカバーできなくなり（リザーブが不足，あるいはヘッジコストに見合わない），CVA デスクが損失を被るかもしれない．しかし，留意すべきなのはクレジットだけでなく，市場リスクも含まれる．B 行のクレジットが不変でも，マーケット変動により，当該オプションが二倍の 20 億円の価値に変化したら，B 行のクレジット・エクスポージャーは二倍になり，言わば先の 2 億円から今の 4 億円になるので，CVA デスクとしては，2 億円分の手当が必要となる．対して，フロントのトレーディング・デスクは Back-to-back でパススルーするので, 0 である．[22]

さらに，市場とクレジットの相関にも注意を払わなければならない．市場の変化はインプライド・ボラティリティである程度は観測可能であって，取引可能でもあるが，相関はインプライドの相関は入手し難く，またヒストリカル相関も問題含みである．[23]

---

[20]オプション・ショートの場合，売り手は（既にプレミアムが支払われておれば），カウンターパーティ・リスクはない．買い手にはカウンターパーティ・リスクに晒される．

[21]欧米の金融機関では，CVA を価格に織り込んで提示する方向付けが主流になりつつある．仮に一切考慮しない場合では，顧客にとって有利になる契約になり，相対的に CVA を採用していない銀行に取引が集中する,「逆選択（adverse selection）」も懸念される（潜在的にシステミックリスクやモラルハザードを増長する）．

[22]但し，CVA デスクが CDS のプロテクションの買いを 2 億円相当しておけばよい，というタンデムな話ではない．

[23]市場流動性の枯渇や信用収縮が引金となって生じる，急激な相関の高まりの伝搬（contagion 現象）に注意すべき．ベガ・リスク以上に，相関リスクは厄介な代物である（クロス・ガンマとの兼ね合いもある）．

2　CVA の導入

まず導入として，CVA について概念的なアプローチを試みる．

2.1　基本方針

教科書にあるデリバティブ価格付けの理論は，大概はリスク中立化法（若しくはそれに準じる手法）に依拠するのが標準的である．しかし，相対取引である以上，取引相手（カウンターパーティ）の信用リスクに晒される（相手先から見ても当方のクレジットが問題になる）．クレジット・リスク[24] を考慮することはリスク・プレミアムを載せて割り引くのが，社債などの伝統的資産についての考え方であるが，デリバティブの評価には馴染まず，基本路線としては，リスク中立測度（risk-neutral measure）の下での価格付けになる．[25] これはカウンターパーティ・リスク考慮後の評価についても同様である．デリバティブの価格でカウンターパーティ・リスクを考慮せずに評価した価格を V，考慮したものを V^* と表記すると，CVA (Credit Value Adjustment) は，

$$V^* = V - \mathrm{CVA} \tag{2.1}$$

で与えられる．自行（当社）のデフォルト・リスクを考慮に入れない（unilateral）のであれば，カウンターパーティのデフォルト・リスクだけ考慮すればよく，[26] CVA ≥ 0 である（故に，$V^* \leq V$)．しかし，双方向（bilateral）を考慮すれば，CVA < 0（i.e. $V^* > V$）のケースもありえる．

2.1.1　CVA の定式化——片方向（unilateral）

満期 T の店頭デリバティブ取引の CVA について，数学的に厳密に問題を設定する．デリバティブ価格付けは，リスク中立化法——リスク中立測度空間：$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathcal{Q})$ の下での価格付けでなされる，と仮定する．ここで，$\mathcal{G}_t \equiv \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ は全て包含したフィルトレーションである．

以降，断り無く，$D(t,T)$ をリスクフリーのディスカウント・ファクター，[27] N_t をデフォルト・フリーな短期金利（瞬間スポットレート，連続複利）r_t で廻したリスクフリー資産価額（$N_0 = 1$ とする）と表記する．つまり，

$$D(t,T) = \frac{N_t}{N_T} = \exp\left[-\int_t^T r_u du\right] \quad \left(N_t = \exp\left[\int_0^t r_u du\right]\right) \tag{2.2}$$

と表される．片方向の CVA では，当行が生存している条件下でのカウンターパーティ・リスクのエクスポージャーのみ考慮する．[28] 取引の相手行（カウンターパーティ）のデフォルト時刻 τ について，もし，a) $\tau > T$ であれば（$T =$ スワップ満期)，最後の支払まで滞りなく実行されるが，b) $\tau \leq T$ では，回収率 $\delta \in [0,1]$ をその時点 τ での時価 V_τ に乗じた額を受け取れる（但し，これ

[24]議論の簡単化のため，クレジット・リスク = デフォルト・リスク，とする（実際には，デフォルトは倒産と同義ではないし，格下げも信用事由になる）．

[25]マーケットでの「評価測度（pricing measure)」と言うべきかも知れない．

[26]従来，カウンターパーティ・リスク計測では一方向 CVA が用いられてきたが，昨今の欧米の金融機関では，双方向 CVA を指向している．

[27]確定的（決定論的）な金利期間構造の場合，$D(t,T)$ は時点 t スタート，満期 T のフォワード割引債価格．

[28]市場全体で考えれば，同じパラメータで，同じモデルで，取引条件に齟齬がなければ，デリバティブはゼロサムであるが，片方向 CVA の非対称性より，常に正のエクスポージャーが残されることになる．一方，双方向 CVA では，全てネットアウトすれば，0 になる（ので整合的）．

は正値のケースであり，負値であれば支払う義務がある）．[29] 式で表せば，次の様になる．

$$\begin{aligned} V_\tau^* &= 1_{[\tau \le T]} \left(\delta V_\tau^+ - V_\tau^- \right) + 1_{[\tau > T]} V_\tau \\ &= V_\tau - 1_{[\tau \le T]} \left(1 - \delta \right) V_\tau^+ \end{aligned} \tag{2.3}$$

両辺をディスカウントした後，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下での期待値をとれば，

$$V^* = V - E^{\mathcal{Q}} \left[\left(1 - \delta \right) D(0, \tau) \, 1_{[\tau \le T]} \, V_\tau{}^+ \right] \tag{2.4}$$

を導く．明らかに，$V^* \le V$ である．即ち，片方向 CVA は，

$$\mathrm{CVA}(t, T) = E_t^{\mathcal{Q}} \left[L \, D(0, \tau) 1_{[\tau \le T]} V_\tau{}^+ \right] \qquad (L \equiv 1 - \delta) \tag{2.5}$$

と表され，したがって標語的に言えば，

CVA = {LGD × (リスクフリーでの) 割引 × デフォルト発生 × エクスポージャー } の期待値
= LGD × 割引期待エクスポージャー × デフォルト確率

但し，二行目の等式は，一行目の式での期待値の括弧の中の各成分：LGD，ディスカウントファクター，デフォルト過程，将来のエクスポージャーが独立な場合に限り，成り立つ．以下に見るように，この独立の設定で，CVA 計算はかなり容易になる．

2.1.2 CVA の定式化——双方向（bilateral）

次に，双方向 CVA について考える．当行 $(i = 1)$，相手行 $(i = 2)$ のデフォルト時刻（確率変数）を各々τ_1，τ_2 とし，便宜のため，$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ とおく．[30] すると，デフォルト事象 $1_{\{\tau_i \le t\}}$ $(i = 1, 2)$ から生成された（右連続な）フィルトレーションは，$\mathcal{H}_t = \sigma \left(\{ \tau_1 \le u \} \vee \{ \tau_2 \le u \} | u \le t \right)$ である．マーケットで観測される（右連続な）サブ・フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ は，$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \equiv \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ と包含される．考慮すべきは，$\{ \tau_1 \, , \tau_2 \, , T \}$ の順序であるから，便宜の為に，

$$\begin{cases} A_a = \{ \tau_1 \le \tau_2 \le T \} \ , \ A_b = \{ \tau_1 \le T \le \tau_2 \} \implies A = A_a \cup A_b \\ B_a = \{ \tau_2 \le T \le \tau_1 \} \ , \ B_b = \{ \tau_2 \le T \le \tau_1 \} \implies B = B_a \cup B_b \\ C_a = \{ T \le \tau_1 \le \tau_2 \} \ , \ C_b = \{ T \le \tau_2 \le \tau_1 \} \implies C = C_a \cup C_b \end{cases}$$

と表記する．$\Pi(t, T)$ を $[t, T]$ での確率的な将来キャッシュフロー（一般化の為に抽象的に表しており，満期 T までの期中キャッシュフローも想定），[31] $V(t, T) = E_t^{\mathcal{Q}} \left[\Pi(t, T) \right]$: Net Present Value at t（リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下での $|\mathcal{F}_t$ で制限した条件付期待値）と表記する．ここで，$L_i = 1 - \delta_i$: loss given default（LGD）δ_i: recovery rate（回収率:$\delta_i \in [0, 1]$）であり（$i = 1, 2$），定数とすれば（確率的な δ_i や L_i もあり得る），カウンターパーティ・リスクを考慮した価値を右肩に∗付きで書くと，$V^*(t, T) = E_t^{\mathcal{Q}} \left[\Pi^*(t, T) \right]$ と表される（$E_t^{\mathcal{Q}} [\, \cdot \,] = E^{\mathcal{Q}} [\, \cdot \, | \, \mathcal{G}_t]$) と略記）．

[29] バリア・オプションの場合での，KO（Knock-Out）と KI（Knock-In）の関係に類似する．他の条件が等しいならば，Plain-vanilla = KI + KO が常に成り立つ．
[30] $\tau \wedge t \equiv \min\{\tau, t\}$, $\tau \vee t \equiv \max\{\tau, t\}$.
[31] 抽象的な表記だが、Π は各キャッシュフロー π_u が立つ各時点 u までの年限の $D(t, u)$ を乗じてディスカウントされたキャッシュフローの総和（時間に沿っての積分）を意味する．

命題 1　上記の条件下で，双方向のデフォルトを考慮した（割引された）キャッシュフローは,

$$E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,\Pi^*(t,T)\,\right] = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,\Pi(t,T)\,\right] - \mathrm{CVA\_BR}(t,T) \tag{2.6}$$

$$\mathrm{CVA\_BR}(t,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,L_2\,1_B\,D(t,\tau_2)V_{\tau_2}^{+}\,\right] - E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,L_1\,1_A\,D(t,\tau_1)V_{\tau_1}^{-}\,\right] \tag{2.7}$$

と表される．

実際，上記の条件下で，双方向のデフォルトを考慮した（割引された）キャッシュフローは,

$$\begin{aligned}\Pi^*(t,T) = \quad & 1_C\,\Pi(t,T)\\ & +1_B\,\left\{\Pi(t,\tau_2) + D(t,\tau_2)\left(\delta_2 V_{\tau_2}^{+} - V_{\tau_2}^{-}\right)\right\}\\ & +1_A\,\left\{\Pi(t,\tau_1) + D(t,\tau_1)\left(V_{\tau_1}^{+} - \delta_1 V_{\tau_1}^{-}\right)\right\}\end{aligned}$$

であるから，期待値をとって整理すれば，上の命題の題意は明らかである．[32] (2.6)，(2.7) 式を整理して表記し直すと,

$$V^*(t,T) = V(t,T) - W(t,T) \tag{2.8}$$

$$W(t,T) = U_2(t,T) - U_1(t,T) \tag{2.9}$$

$$U_1(t,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,L_1 1_A D(t,\tau_1)V(\tau_1,T)^{-}\,\right] \tag{2.10}$$

$$U_2(t,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\,L_2 1_B D(t,\tau_2)V(\tau_2,T)^{+}\,\right] \tag{2.11}$$

となる．ここで,

- $W(t,T) = \mathrm{CVA\_BR}$（Bilateral Credit Valuation Adjustment）
- $U_1(t,T) = \mathrm{DVA}$（Unilateral Debit Valuation Adjustment）— liability benefit
- $U_2(t,T) = \mathrm{CVA}$（Unilateral Credit Valuation Adjustment）— asset charge

である．$U_i(t,T)\,(\geq 0)$ の大小により，CVA_BR $W(t,T)$ は正値にも負値にもなりえる．

2.1.3　CVA の解き方

当行，相手行ともに（十分に長年限の）CDS の Mark-to-Market が可能とする（幾つかを与件として）．すると各々，CDS premium （CDS スプレッド）から生存確率 (survival probability) $S(t,T) = \mathcal{Q}\left[\,T < \tau \mid t < \tau\,\right]$ が計算できる．[33] 正確には，現在の TS（ターム・ストラクチャー）に沿った生存確率 $S(0,T)$ が確定的というべきかもしれない．[34] ここからハザード・レート，即ち，$(t, t+\Delta t]$ でデフォルトする確率を計算でき，離散近似として支払日 $\{t_i\}$ で区切れば，$S(t_{i-1}) - S(t_i)$ $(\Delta t = t_i - t_{i-1})$ となる．

以上より，$S(t,u)$ が他の確率変数と独立とすれば（時点 t では $S(t,u)$ は確定的），(2.10) 式，(2.11) 式の期待値を $\int_0^T \cdots dS(u)$ の体裁で表現できる．議論の簡単化の為，ディスカウント・ファ

[32] $\widehat{V}_t = \frac{V_t}{N_t}$ が $\mathcal{Q}$-マルチンゲールであることに留意.

[33] 構造モデル的に言えば，ないしは EDS（Equity Default Swap）としては，連続時間参照ディジタル・バリアであり，生存確率は時間 t の関数になる.

[34] 本来，フォワード・レートに該当する将来の生存確率 $S(t,T)$ は確率的（但し，連続な Markov 過程）とする方が自然な着想といえる．具体的には，a)LMM に準じたマーケット・モデルや，b)CIR 過程に類似した確率的なデフォルト強度（stochastic intensity）モデル，が考えられる．なお，双方向の場合の $S(t,T)$ は難解であるが，単一の参照組織の場合は比較的簡単である.

クター $D(t,T)$，生存確率 $S(t,u)$ が決定論的とおくと，

$$
\begin{aligned}
U_2(t,T) &= E_t^{\mathcal{Q}}\left[\, L_2 1_B D(t,\tau_2) V(\tau_2,T)^+ \,\right] \\
&= L_2 1_{\{\tau>t\}} \int_0^t D(t,u) E_t^{\mathcal{Q}}\left[\, V(u,T)^+ \,\right] dS(t,u) \\
&= L_2 1_{\{\tau>t\}} \int_0^t D(t,u) \mathrm{EE}(u,T) dS(t,u) && (2.12) \\
&\simeq L_2 1_{\{\tau>t\}} \sum_i D(t,t_i) \mathrm{EE}(t_i,T) \left(S(t,t_{i-1}) - S(t,t_i)\right) && (2.13)
\end{aligned}
$$

と形式的に解かれる（$\mathrm{EE}(u,T) \equiv E_t^{\mathcal{Q}}\left[\, V(u,T)^+ \,\right]$）.

2.1.4　プレーンバニラ・スワップの CVA

デリバティブがプレーンバニラな金利スワップ V の場合を考える．[35] $\mathrm{EE}(u,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\, V(u,T)^+ \,\right]$ であることから，時点 u スタート，満期 $T-u$ のフォワード・スタート・スワップを原資産とするオプション，即ち，スワップションである．この場合，前述の (2.12) 式では，スワップションの（将来）価値 $\mathrm{EE}(u,T)$ を，評価時点 t での現在価値までディスカウントし，LGD を乗じたものについて，生存確率を掛け——デフォルト時刻の分布（$\tau \in (u, u+dt]$）の密度を乗じて，時間軸に沿って積分していることになる．

プレーンバニラ・スワップションの価格付けには通常，マーケット・モデル乃至は Black モデルが採用される．後者は，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下で全てのフォワードレートが対数正規（幾何 Brown 運動）に従うと仮定したモデルであるため，$\mathrm{EE}(u,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[\, V(u,T)^+ \,\right]$ が閉形解で得られる．[36] $\mathrm{EE}(u,T)$ は，$\mathcal{F}_u$-可測であり，条件付期待値の tower property より，これに生存確率と（リスクフリーな）ディスカウントを乗じて，期間 $[0,T]$ で積分すればよく，また，高速且つ高精度な数値積分法が知られている．BS モデル（Black モデル）の様な対数正規，特に，指数マルチンゲールの形には，解析的に都合の良い性質があるため，解析近似を用いる手法も考えられる．[37]

2.1.5　早期償還（Early termination）

エクスポージャー計算の際にも言及されるが，早期償還（期中解約：early termination）の価値の評価にしばしば引き合いに出されるのが，キャンセラブル・スワップである．[38] ここで，cancelable swap と extendible swap の等価性に注目する．$0 \le t \le u \le T$ として，

---

[35] スワップでは参照指標のリセットなどで翌利払のキャッシュフローが固定化されるため，離散的な効果が現れる．つまり，1 期分は額面が確定した割引債に変化し，エクスポージャーは時間に関して滑らかでなくギザギザになる．

[36] Black モデルではリスク中立測度 $\mathcal{Q}$ で考えるため，基準財（numéraire）は，連続時間の短期金利（デフォルト・フリー且つ連続複利での瞬間的なスポットレート金利）で運用する銀行預金残高を基準財（numéraire）である．したがって，金利オプションの Black モデルは内部矛盾をきたす．そこで，数学的に厳格なモデルとして，いわゆるマーケット・モデル（LMM，SMM 等）が用いられる．固有の評価測度に応じて，原資産（参照指標）が対数正規であるとする（しかし，spot measure（リスク中立測度に該当）の下ではそうではない）．(2.12)（正しくは，(2.13)）はキャッシュフローが分離可能（separable）な問題なので，各々の期間の基準財（割引債あるいは annuity）に対応した固有の測度（$\mathcal{Q}^{t_i}$ あるいは $\mathcal{Q}^{t_i,t_j}$）について，原資産（参照指標）が指数マルチンゲールであるモデルなので，結果的に Black モデル同様，解析的に扱い易い閉形解を得られる．

[37] 例えば，バリア・オプション等のエキゾティック物も解析的に扱えるため，近似的にこの手法が応用されることもある．本来はトリガー型の早期償還条項ではなく最適停止時間の問題であるが，バミューダ型のオプションの評価に応用されるケースもある．コンベクシティ調整や合成分布等を利用して，便宜的にスキュー・モデルとするケースもありえる．

[38] 任意期中行使（アメリカンやバミューダン）の意味での早期償還プレミアムと，バリア等の期中解約の価値は異なる（自由境界値問題と境界値問題の違い）．

$$\boxed{\text{スワップ}\,(t,T) = \text{スワップ}\,(t,u) + \text{フォワード・スタート・スワップ}\,(u,T)}$$

が常に成り立つ．$D(t,t)=1$ より，上式を書き下すと，

$$\begin{aligned} V(t,T) &= V(t,u) + D(t,u)V(u,T) \\ &= V(t,u) + D(t,u)\left\{V(u,T)^{+} - V(u,T)^{-}\right\} \end{aligned}$$

であり，移項して，$V(t,T) + D(t,u)V(u,T)^{-} = V(t,u) + D(t,u)V(u,T)^{+}$ を得る．故に，

$$V(t,T) + D(t,u)E_t^{Q}\left[V(u,T)^{-}\right] = V(t,u) + D(t,u)E_t^{Q}\left[V(u,T)^{+}\right] \tag{2.14}$$

が成り立つ．$D(t,u)\,E_t^{Q}\left[V(u,T)^{\pm}\right]$ は評価時点 t，オプション満期 u，スワップ満期 $T-u$ のスワップション（スワップのオプションを swaption という）の価値を表す．(2.14) は，満期 T のキャンセラブル・スワップは満期 u のエクステンダブル・スワップに等しいことを示している．[39]

2.2 CVA に関する諸注意

CVA を考慮した時価評価は当然として，[40] 昨今の欧米のデリバティブを扱う銀行や証券会社では，asset charge のみならず liability benefit も織り込むことが求められており，したがって，片方向（Unilateral）ではなく双方向（Bilateral）CVA がほぼ常識となっている（それ故，価格がリスクフリーより高くなることもある）．日本でも，CVA のアプローチも徐々に浸透していくものと考えられる，

ここで，CVA に関する幾つかの注意事項をまとめておく．

2.2.1 相関（correlation）

たとえ，二行のクレジット（信用力）に関して不変だったとしても，スワップ時価が変化するため，エクスポージャーは変化する．クレジット・エクスポージャーを動的にヘッジする場合，[41] クレジット市場に変化がなくとも，エクスポージャーが変化に応じて，為替や金利に関するヘッジが必要になる．勿論，こうしたマーケットの金融指標が不変でも，当事者の二行のクレジットが変わればデフォルト確率も変わるので，当然にエクスポージャーも変化する．更には両方のクロス・ガンマの効果（マーケットとクレジットのクロス項）も考慮する必要が出てくる．この際，マーケットとクレジットの相関も考えなければならないが，この推定は容易ではないし，安定的とも考えにくい．しかし，完全相関とか，独立（無相関）とするには極端な条件設定と言え，何らかの評価上のバイアスをもたらす危険を孕む．[42]

---

[39] 以上はペイオフの関係性だけから定まるモデル・フリーな関係である．ヨーロピアン・オプションについての put-call parity と同じである．

[40] 米国財務会計基準 FAS157 では，カウンターパーティ・リスクを取り込んだ期待損失を正しく反映したポートフォリオの公正価値を義務付けている．

[41] ヘッジツールとして，スワップや CDS の他にも，スワップションや CDS オプション（スワップション），CCDS（トリガー条項で起動する CDS）等も用いるのが望ましいが，薄いマーケットである．

[42] 詳細は省略するが，相関リスクはボラティティのベガ・リスクに相当するインパクトをもたらす可能性がある．相関係数の推定もインプライド・ベースが望ましいとされるが，整合的な相関を与える手法は自明でも容易でもない．マーケットのインディケーションが整合的とは限らない，しかしこれを裁定機会と捉えるかは議論の余地がある．また，ヒストリカル・データに基づく相関も重要であるが（少なくとも，非負定値），ミスリードする危険もあり，また，相関の伝搬性とか別の課題も出ている．

2.2.2　誤方向リスク（Wrong way risk）

広義の意味での「相関」リスクであり，不利なケースを wrong way, 有利なケースを right way と呼ぶ．カウンターパーティ・リスクとエクスポージャーの間の相関が不利な方向に働くケース（取引相手がデフォルトする確率が高いときにエクスポージャーが高く，低いときにはエクスポージャーが低い）が誤方向（wrong way）リスクである．巨大損失をもたらしかねないため衆目を引くのが誤方向リスクである．

- 通貨スワップ（CCS）取引——ソブリン・リスクが顕在化し，現地通貨が弱含み，当地の取引相手の銀行のクレジットも悪化する．
- クレジット・デフォルト・スワップ（CDS）取引——プロテクションを売っていた AIG やモノラインが，サブプライム問題発生以後，クレジットが悪化し契約できなくなる．
- 金利スワップ（IRS）取引——リバース・フローターの受けの取引相手が，金利上昇時にファンディングできなくなり，デフォルトリスクが増す．

これらの事象を記述する適切なモデルを構築したり，連続的なヘッジ戦略をとることは事実上困難に思える．これらは，カタストロフィックなショックや信用収縮，流動性枯渇や市場機能不全がもたらす場合に顕在化しやすいものだからである．むしろ，ジャンプ・リスクはストレス・テスト等の領域であり，適切な経営判断というレベルの課題である．[43]

2.2.3　数値解法

数値計算の手法としては以下の三種類に大別できる．

1. 解析的近似 —— 金利スワップ等の様に，[44] B-S モデルに準拠した解析近似を用いたスワップションを考慮することで，計算する．比較的計算コストは小さくて済む．
2. シミュレーション —— 経路依存性があったり，ファクター数が多くエキゾティックな金融取引の場合，モンテカルロ・シミュレーションに基づく手法がとられる．早期償還条項やアメリカン条項の数値解法について，前世紀末から幾つか目覚ましい発展があった．[45] もっとも，この手法は計算コストは嵩みがちである．
3. バックワード・インダクション —— ツリーに準じる方法で後退尾時間方向に遡及して条件付期待値を計算する．経路依存でなく，状態変数次元が低次元であって，アメリカン，バミューダ型に適用される．

デリバティブのペイオフやモデルの複雑性の程度に応じて，どの数値解法が相応しいかが選択される（得手不得手，一長一短がある）．実務上大きな問題となるのが，計算時間であり，出来る限り高速に処理を行い，膨大な計算コストの省力化が求められ（ポジションの取引件数が膨大過ぎる場合，分散処理や計算手法の改良ぐらいでは覚束ない），ある程度，厳密性や精度を犠牲にして，

[43] モンテカルロ法ではなく，独立な（あるいは直交する）設定での解析的手法に近いモデルの場合であっても，ジャンプや相関についての摂動，漸近展開による近似で保守的な評価を考えるケースもありえる．但し，エキゾティック条項が複雑であったり，確率的ファクターが多次元である場合は，基本的にモンテカルロ法に準拠した取り扱いになる．

[44] スワップのカウンターパーティ・リスクのエクスポージャーとして，スワップションを織り込んだ，キャンセラブル（エクステンダブル）スワップを考えればよく，問題が比較的単純である．

[45] Longstaff-Schwartz 他の LSM（最小二乗モンテカルロ法）等が該当する．

計算効率を優先するケースもある．[46] 最近の傾向として，乱数や準乱数の研究開発，プログラミング言語や平行・分散処理、CPU やメモリなどハードウェアの発達により，モンテカルロ・シミュレーションを用いたネット・エクスポージャーや CVA 計算が重要視されつつあるが，同一のシナリオ・セットでの計算でなければならないことに注意する．[47] 一方，大量のプレーンバニラのポジション（取引残高）を扱う場合は，計算負荷が軽い解析的なアプローチも有効である．

3 Appendix

本論で与件として用いた幾つかの結果を簡単に照会する．

3.1 CDS

CDS（クレジット・デフォルト・スワップ）に関連した話題である．$D(t,T)$：リスクフリー（デフォルト・フリー）な満期 T で 1 円を支払う，評価時点 t での割引債価格，χ_t：時点 t で観測される CDS プレミアム，とする．

金利スワップ（固定受け（レシーブ））では，固定レグ（fixed leg）から変動レグ（floating leg）のキャッシュフローを差し引いたものである．一方，CDS では一種の保険料のように CDS プレミアムを（参照組織がデフォルト発生するまで）支払い続ける——これを premium leg（fixed leg）という．デフォルトが発生した場合は，default leg（protection leg）という．[48]

3.1.1 生存確率

$S(t,T)$：生存確率（survival curve とも言う），回収率 δ，CDS プレミアム c_t とする．このとき，CDS（プロティクションの売り）の価値は，[49]

$$V_{\mathrm{CDS}}(t,T) = V_{\mathrm{prem}}(t,T) - V_{\mathrm{def}}(t,T)$$

$$V_{\mathrm{prem}}(t,T) = c_t \left\{ E_t^{\mathcal{Q}} \left[\sum_i 1_{[\tau > t_i]} D(t,t_i)\, \Delta t_i \right] + V_{\mathrm{acc}}(t,T) \right\} \tag{3.1}$$

$$V_{\mathrm{acc}}(t,T) = E_t^{\mathcal{Q}} \left[\sum_i (\tau - t_{i-1})\ 1_{[t_{i-1} \le \tau < t_i]} D(t,\tau) \right] \tag{3.2}$$

$$V_{\mathrm{def}}(t,T) = (1-\delta) E_t^{\mathcal{Q}} \left[1_{[\tau < T]} D(t,\tau) \right] = (1-\delta) \int_t^T D(t,u) dS(t,u) \tag{3.3}$$

で表される．リスクフリーの金利期間構造 $D(t,T)$ が既知であれば（$t=0$ では決定論的として計算），各年限の CDS プレミアムから，ブートストップ法の要領で，逐次的に生存確率 $S(t,T)$ を推

[46] バーゼル規制に則った簡易法として，ルックアップ・テーブルと掛目でクレジット・エクスポージャーを算出する方法も採用されてきた．しかし，ネッティングやリスク計算の精度が甘く，余分にリスク資本を調達したり，枠を制限する必要が出てくる（しかも，保守的とは限らない）．

[47] 意図せざる分散効果を排除するためである．また，モンテカルロ法は分散処理の点では実装が比較的容易である．

[48] プレミアム・レグではデフォルト発生時から直近の支払日までのアクルーアル調整が含まれる．実務では評価上ほぼ，$[t_{j-1}, t_j]$ の半分の寄与を勘案する．連続時間での支払いとすれば数式は簡明になるが，実務的には離散化による相違は無視できない．

[49] イールドの様に，スプレッドというのは正しくはない．CDS プレミアム（保険料）は，CDS の現在価値を 0（パー）とするような数値である．

定できる．[50] $F(t)$：デフォルト時刻 τ（確率変数）の分布関数（その密度 $f(t)$）については，

$$F(t) = \mathcal{Q}\left(\tau \le t\right) = \int_0^t f(u)du = 1 - \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$$
$$\mathcal{Q}\left(\tau > t\right) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma(t)} = \exp\left(-\int_0^t \gamma(u)du\right)$$
$$f(t) = \frac{d\mathcal{Q}}{dt}\left(\tau > t\right) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \quad , \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$$

となる．ここで，γ: ハザード率（hazard rate），$\Gamma(t)$: ハザード関数，λ:（Poisson 過程の）強度（intensity）である．

3.1.2 デフォルタブル割引債

右連続な過程 $H_t = 1_{[t\le\tau]}$ から生成されるフィルトレーション $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u, u \le t)$ を考える．デフォルト事象の情報を含まない（マーケットの確率変動を表す）フィルトレーションを $\mathcal{F}_t$ とし，$\mathcal{G}_t \equiv \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ とおく．n 個の参照組織（reference entity）を参照する場合は，$H_t^i = 1_{[t\le\tau_i]}$，$\mathcal{H}_t = \prod_{i=1}^n \mathcal{H}_t^i$ を考えるが，ここでは 1 銘柄についてのみを記す（n 銘柄の場合は添字 i が付く）．

満期 T で額面 1 円を支払う defaultable な割引債を考える．時点 $t = 0$ での価格は，デフォルト・フリーの割引債価格 $D(t,T)$ を乗じてディスカウントした，将来のペイオフの測度での期待値：

$$\begin{aligned} P^\delta(0,T) &= D(0,T)\, E^{\mathcal{Q}}\left[\, \left\{1_{[\tau>T]} + \delta 1_{[\tau\le T]}\right\} \right] \\ &= D(0,T)\, \left\{\mathcal{Q}\left(\tau > T\right) + \delta\mathcal{Q}\left(\tau \le T\right)\right\} \\ &= D(0,T) - (1-\delta)D(0,T)\mathcal{Q}\left(\tau \le T\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．回収率 $\delta \in [0,1)$ とした．時点 t $(0 \le t \le T)$ での価格は，

$$P^\delta(t,T) = E^{\mathcal{Q}}\left[\, D(t,T)\, \left\{1_{[\tau>T]} + \delta 1_{[\tau\le T]}\right\} \,\middle|\, \mathcal{H}_t \,\right] \tag{3.5}$$
$$= 1_{[t\ge\tau]}\delta D(t,T) + 1_{[t<\tau]}\tilde{P}^\delta(t,T) \tag{3.6}$$

となる．$\tilde{P}^\delta(t,T)$ とは，デフォルト以前の (pre-default) デフォルタブル割引債価格——$t < \tau$ の下での条件付期待値：

$$\tilde{P}^\delta(t,T) = E^{\mathcal{Q}}\left[\, D(t,T)\, \left\{1_{[\tau>T]} + \delta 1_{[\tau\le T]}\right\} \,\middle|\, t < \tau \,\right] \tag{3.7}$$
$$= D(t,T)\, \left\{1 - (1-\delta)\mathcal{Q}\left(T \ge \tau \,|\, T \ge \tau\,\right)\right\} \tag{3.8}$$

である．[51] 但し，

$$\mathcal{Q}\left(T \ge \tau \,|\, T \ge \tau\,\right) = \frac{\mathcal{Q}\left(t < \tau \le T\right)}{\mathcal{Q}(t < \tau)} = \frac{S(t) - S(T)}{S(t)} \tag{3.9}$$

である（survival curve: $S(t) = 1 - F(t)$）．(3.4) 式，及び，(3.8) 式の右辺第二項が unilateral CVA に該当する．

---

[50] 但し，ここには確率的な要素が含まれていない．マーケットで観測できるのは，各年限の CDS プレミアムの現在値であるから，求めらるのも，現在の TS だけから形成（$t = 0$）されたものである．

[51] pre-default，post-default の二枚の状態空間（平面）を想像すると分かり易い．backward inductive には，pre-default 平面上のデフォルタブル債の継続価値と post-default 平面上のリスクフリー債価格を，局所的なデフォルト発生確率を加重して平均する．

更に，$1 - H_t = 1_{[t>\tau]}$ に注意し，$F_t = \mathcal{Q}(\tau \le t|\mathcal{F}_t)$, $S_t = 1 - F_t = \mathcal{Q}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ と置き，$\gamma_t = (1-F_t)^{-1} f_t$, $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_u du$ とするとき，以下の式が成り立つ．

$$E^{\mathcal{Q}}\left[\, 1_{[t<\tau]} X \;\middle|\; \mathcal{G}_t \,\right] = 1_{[t<\tau]} E^{\mathcal{Q}}\left[\, X \mid \mathcal{G}_t \,\right] = 1_{[t<\tau]} \frac{E^{\mathcal{Q}}\left[\, 1_{[t<\tau]} X \;\middle|\; \mathcal{F}_t \,\right]}{\mathcal{Q}\,(t < \tau \,|\, \mathcal{F}_t)} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{Q}\,(t < \tau \le T \,|\, \mathcal{G}_t) = 1_{[t<\tau]} \frac{\mathcal{Q}\,(t < \tau \le T \,|\, \mathcal{F}_t)}{\mathcal{Q}\,(t < \tau \,|\, \mathcal{F}_t)} = 1_{[t<\tau]} E^{\mathcal{Q}}\left[\, 1 - \mathrm{e}^{\Gamma_t - \Gamma_T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \,\right] \tag{3.11}$$

3.2　確率的クレジット

更に一般化すれば,（相関のある）確率的金利/確率的クレジット/確率的為替や原資産のモデルであり，クレジット（信用度）について，以下の方法が考えられる．数学的に整合的なモデル構築は難解であり，粗く，近似的な意味でのモデルが好まれる傾向にある．[52]

3.2.1　確率的強度

スポットレート金利が CIR 型（CIR++等）の正値な OU 過程（平均回帰性のある拡散過程）で表され，且つ，デフォルト過程が Poission 過程であり，その強度（intensity）λ_t も別の OU 過程で記述されるとする．$dr_t = (\alpha_r - \beta_r r_t)\,dt + \sigma(r_t) dW_t$, $d\lambda_t = (\alpha_l - \beta_l \lambda_t)\,dt + \nu(\lambda_t) dB_t$ となる．このとき，ディスカウント・ファクターとして，

$$D^\star(t,T) = E^{\mathcal{Q}}\left[- \int_t^T (r_u + \lambda_u)\,du \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \tag{3.12}$$

を考える．これら金利モデルで言う affine-class（HW 等の正規 OU 過程も含め）は解析的に扱い易いので，affine-class の金利デリバティブ・モデルでの結果を利用することが出来る．

3.2.2　マーケット・モデル

多資産 BS モデルや金利の LIBOR マーケット・モデルに準じた枠組であり，基本的に d 次元のマルチ・ファクターで考える．以下の様に，原資産の確率変動が指数マルチンゲールだけで記述されるようなモデルを考えることも多い．[53]

$$\begin{cases} X_t = g_t\, M_t \quad , \quad \dfrac{dM_t}{M_t} = \sigma_t \cdot dW_t \quad : \quad \mathrm{R}^n\text{-valued} \\ M_t = \mathcal{E}_\sigma(W_t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\, I_t \,\rangle + I_t} \quad , \quad I_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_u \cdot dW_u \\ g_t = E^{\mathcal{Q}}\left[\, X_t \,\right] \quad : \quad \text{Forward price} \end{cases}$$

LIBOR やフォワードスワップレートを原資産（参照指標）とするように，生存確率や CDS スプレッド自体を参照指標とする考え方もある．

[52] Lévy 過程の枠組で構築したり，sub-ordinate を用いた Variance-Gamma 過程などを導入するケースも考えられるが，計算コストが嵩張るので，扱い方に問題が残る．
[53] 測度変換と CMG 定理を適用し，計算の便宜とする．クオント調整（コンベクシティ調整）に類する話である．

3.2.3 構造モデル (structual model)

上記二つのモデルは，誘導モデル（reduce-form）に類し，マーケットの価格から外生的に与えるものであって，経済的にデフォルト発生を記述するものではない.

こちらは，企業価値（市場で観測できないが）を原資産として，デフォルト発生を内生的な経済構造によって表現したモデルである．[54]

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \cdot dW_t - dJ_t \tag{3.13}$$

これも多次元の問題であり，参照指標として（乃至は CDS スプレッド）も取り込む．デフォルト発生は外生的に与えたバリア価格 K への初期到達時刻（first passage time）で記述する．これは，複雑なペイオフを持つ多資産のエキゾティック・オプションの問題となり，数値計算上でも数学的に，技術的に難解なものの一つである.

[54] これは構造モデルとして典型的なもので，最も簡単なモデルは Merton 構造モデルであり，バリア・オプションを用いた Black-Cox，満期の無いオプションとして Leland，モデル等があるが，これらは解析的な便宜のため，原資産価格に対数正規を仮定している.

参考文献

[1] Bielecki, T. and M. Rutkowski (2001) *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer.

[2] Bielecki, T. and M. Jeanblanc, M. Rutkowski (2009) *Credit Risk Modeling.* 大阪大学金融・保険レクチャーノートシリーズ.

[3] Birge, J. and V. Linetsky (Ed.) (2008) *Financial Engineering.* North-Holland. 木島正明 (監訳) (2009) 「金融工学ハンドブック」. 朝倉書店.

[4] Brigo, D. and F. Mercurio (2007) *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit.* Springer.

[5] Brigo, D. and A. Alfonsi (2005) *Credit Default Swap Calibration adn Derivatives Pricing with the SSRD Stochastic Intensity Model.* Fin. and Stoc. 9. 29.

[6] Brigo, D. and K. Chourdakis. (2009) *Counterparty Risk for Credit Default Swaps: Impact of spread volatilty and default correlation.* Int. Jour. of Theo. and Appl. Fin. Vol.12, No.7

[7] Brigo, D. and A. Pallavicini, V. Papatheodorou. (2010) *Bilateral conterparty risk valuation for interest-rate products: impact of volatiltiies and correlations.* preprint.

[8] Cesari, G. and M. Jeanblanc, B. Zargari (2010) *Conterparty Risk on a CDS in a Model with Joint Defaults and Stochastic Spreads.* preprint.

[9] Cesari, G. and J. Aquilina, N. Charpillon, Z. Filipović, G. Lee, I. Manda. (2009) *Modelling, Pricing, and Hedgung Counterparty Credit Exposure.* Springer.

[10] Gregory, J. (2010) *Counterparty credit risk - The new challenge for global financial markets.*Wiley.

[11] Stein, H. and K. Lee (2010) *Counterparty Valuation Adjustments.* Bloomberg.

[12] 富安弘毅. (2010) 「カウンターパーティ・リスク・マネジメント」. 金融財政事情.

[13] 楠岡成雄-中川秀敏-青沼君明 (2001) 「クレジット・リスク・モデルーー評価モデルの実用化とクレジット・デリバティブへの応用」. 金融財政事情研究会.

[14] 室町幸雄. (2007) 「信用リスク計測と *CDO* 価格付けーーシリーズ $<$ 金融工学の新潮流 $>$*3*」. 朝倉書店.

当社で取り扱う商品等へのご投資には、各商品等に所定の手数料等（国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）取引の場合は約定代金に対して最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合は、2,730 円（税込み））の売買手数料、投資信託の場合は銘柄ごとに設定された販売手数料および信託報酬等の諸経費、等）をご負担いただく場合があります。また、各商品等には価格の変動等による損失が生じるおそれがあります。商品毎に手数料等およびリスクは異なりますので、当該商品等の契約締結前交付書面、上場有価証券等書面、目論見書、等をよくお読みください。

国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）の売買取引には、約定代金に対し最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））の売買手数料をいただきます。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）は株価の変動により損失が生じるおそれがあります。

外国株式の売買取引には、売買金額（現地約定金額に現地手数料と税金等を買いの場合には加え、売りの場合には差し引いた額）に対し最大 0.9975%（税込み）（売買代金が 75 万円以下の場合は最大 7,455 円（税込み））の国内売買手数料をいただきます。外国の金融商品市場での現地手数料や税金等は国や地域により異なります。外国株式を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。外国株式は株価の変動および為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

ＣＢの売買取引には、約定代金に対し最大 1.05%（税込み）（4,200 円に満たない場合は 4,200 円（税込み））の売買手数料をいただきます。ＣＢを相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。ＣＢは転換もしくは新株予約権の行使対象株式の価格下落や金利変動等によるＣＢ価格の下落により損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建てＣＢは、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

債券を募集・売出し等その他、当社との相対取引によってご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。債券の価格は市場の金利水準の変化に対応して変動しますので、損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

信用取引には、売買手数料（約定代金に対し最大 1.365％（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み）））、管理費および権利処理手数料をいただきます。加えて、買付の場合、買付代金に対する金利を、売付けの場合、売付け株券等に対する貸株料および品貸料をいただきます。委託保証金は、売買代金の 30％以上で、かつ 30 万円以上の額が必要です。信用取引では、委託保証金の約 3.3 倍までのお取引を行うことができるため、株価の変動により委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

株価指数先物取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 0.084％（税込み））をお支払いいただきます。株価指数オプション取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 4.200％（税込み）（2,625 円に満たない場合は、2,625 円））をお支払いいただきます。また、所定の委託証拠金が必要となります。委託証拠金は、ＳＰＡＮにより、先物・オプション取引全体の建玉から生じるリスクに応じて計算されますので、株価指数先物・オプション取引の額の証拠金に対する比率を事前に示すことができません。株価指数先物・オプション取引の価格は、対象とする株価指数の変動等の影響により上下しますので、委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

店頭デリバティブ取引に当たっては、所定の支払日における所定の支払金額、のみお支払いただきます。各商品の評価額は、組み入れた投資対象のデフォルト有無や信用リスクの水準、金利水準、金融指標の変動等により変化し、評価損が発生する場合があります。各商品が取引終了日の前に中途で解約された場合には、この評価損が現実化することや、解約に伴う諸費用が発生することにより、損失を被る場合があります。また、デフォルトや信用リスク水準等の金融市場における相場その他の指標にかかる変動に伴い、追加で担保を差入れて頂く必要が生じる場合があります。当社の業務や財産の状況が悪化した場合に、当社が店頭デリバティブ取引に基づく義務を履行できなくなることにより、お客様に損失が生じる場合があります。詳しくは、契約締結前交付書面をよくお読みください。

野村證券株式会社
金融商品取引業者　関東財務局長（金商）　第 142 号
加入協会／日本証券業協会、（社）日本証券投資顧問業協会、（社）金融先物取引業協会